

DM n°7 : Corrigé

1) Supposons par l'absurde qu'une telle matrice B existe. Comme $B^2 = A$, on en déduit que :

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ ab + bd = 0 \\ ca + dc = 0 \\ d^2 + bc = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2 + bc = -2 \end{cases}$$

- Si $a + d \neq 0$, alors la seconde ligne entraîne $b = 0$. Donc $a^2 = -1$, contradiction car a est un réel.
- Si $a + d = 0$, alors $d = -a$ et en particulier $a^2 = d^2$. Ainsi,

$$-1 = a^2 + bc = d^2 + bc = -2$$

contradiction.

Montrons à présent que $A \in \text{TP}_2(\mathbb{C})$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$B = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{p}} & 0 \\ 0 & \sqrt[2]{2}e^{i\frac{\pi}{p}} \end{pmatrix}$$

Alors, comme B est diagonale,

$$B^p = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & 2e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = A$$

Ainsi, A est toute-puissante.

2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Comme A est toute-puissante, il existe une matrice B telle que $A = B^p$. Or, A' est semblable à A donc il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = PAP^{-1}$. Ainsi,

$$A' = PB^pP^{-1} = \underbrace{PBP^{-1}PBP^{-1}\dots PBP^{-1}}_{p \text{ fois}}$$

On pose alors $B' = PBP^{-1}$, de sorte que $A' = (B')^p$. Donc A' est toute-puissante.

3) (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Comme \mathcal{B}_c est canonique, on a immédiatement $P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, tandis

qu'un calcul d'inverse matriciel donne :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = (P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) &= P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Tout d'abord, montrons que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est toute-puissante. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{\frac{1}{p}} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{\frac{1}{p}} \end{pmatrix}$$

Comme B est diagonale, on obtient $B^p = \begin{pmatrix} 1^p & 0 & 0 \\ 0 & (2^{\frac{1}{p}})^p & 0 \\ 0 & 0 & (3^{\frac{1}{p}})^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est toute-puissante.

Par la question 2), on en déduit que toute matrice semblable à $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est toute-puissante. En particulier, la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)$ l'est également. D'où le résultat voulu.

- 4) (a) Soit $x \in \text{Ker}(f^k)$. Montrons que $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$, i.e. $f^{k+1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Or, $f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$, donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car f est linéaire. D'où $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$, ce qui conclut.
- (b) Supposons par l'absurde que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{Ker}(f^m) \neq \text{Ker}(f^{m+1})$. Comme $\text{Ker}(f^m) \subset \text{Ker}(f^{m+1})$ par la question précédente, on a en particulier $\dim \text{Ker}(f^m) < \dim \text{Ker}(f^{m+1})$, mais comme ces deux espaces ne sont pas égaux, on a en particulier

$$\dim \text{Ker}(f^m) < \dim \text{Ker}(f^{m+1})$$

et ce pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, la suite $(\dim \text{Ker}(f^m))_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers strictement croissante. Or, comme $\text{Ker}(f^m) \subset \mathbb{R}^n$, cette suite est majorée par n . On en déduit une contradiction (une suite d'entiers croissante majorée est stationnaire, donc ne peut être strictement croissante).

(c) On raisonne par récurrence sur ℓ .

- Initialisation : si $\ell = k_0$, alors il est clair que $\text{Ker}(f^\ell) = \text{Ker}(f^{k_0})$.
- Hérédité : soit $\ell \geq k_0$. On suppose que $\text{Ker}(f^\ell) = \text{Ker}(f^{k_0})$. Montrons que $\text{Ker}(f^{\ell+1}) = \text{Ker}(f^{k_0})$. Tout d'abord, par la question 4)a, on a $\text{Ker}(f^\ell) \subset \text{Ker}(f^{\ell+1})$, donc $\text{Ker}(f^{k_0}) \subset \text{Ker}(f^{\ell+1})$. Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(f^{\ell+1})$. Montrons que $x \in \text{Ker}(f^{k_0})$. On a $f^{\ell+1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$, et donc

$$f^\ell(f(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

c'est-à-dire que $f(x) \in \text{Ker}(f^\ell)$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $f(x) \in \text{Ker}(f^{k_0})$, ce qui revient à dire que $x \in \text{Ker}(f^{k_0+1})$. Ainsi, par la question 4)b, on a $x \in \text{Ker}(f^{k_0})$. Par arbitraire sur x , on a donc $\text{Ker}(f^{\ell+1}) \subset \text{Ker}(f^{k_0})$, donc $\text{Ker}(f^{k_0}) = \text{Ker}(f^{\ell+1})$.

Finalement, pour tout $\ell \geq k_0$, on a montré que $\text{Ker}(f^\ell) = \text{Ker}(f^{k_0})$.

- (d) Par la question 4)a, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. De plus, par la question 4)c, la suite (u_k) est stationnaire à partir du rang k_0 . Enfin, par construction de k_0 (question 4)b), pour tout entier $k < k_0$, on a $u_k < u_{k+1}$, donc $u_1 < u_2 < \dots < u_{k_0}$.
- (e) Comme $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'entiers, on a pour tout $k \in \llbracket 1, k_0 - 1 \rrbracket$ $u_{k+1} \geq u_k + 1$. Par récurrence immédiate, on en conclut que $u_{k_0} \geq u_1 + (k_0 - 1)$. Supposons par l'absurde que $k_0 > n$, i.e. $k_0 \geq n + 1$. On a alors $u_{k_0} \geq u_1 + n$. Comme par ailleurs la suite (u_k) est majorée par n , on a

$$u_1 + n \leq u_{k_0} \leq n$$

et donc, comme u_1 est positif, on en déduit que $u_1 = 0$. Cela revient à dire que $\dim \text{Ker}(f) = 0$. Donc $\text{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Ainsi f est injective. Mais comme la composée d'applications injectives est injective, on en déduit que f^2 est injective, donc $u_2 = 0 = u_1$. Ainsi, $k_0 = 1$. Or, par hypothèse $n \in \mathbb{N}^*$ et $k_0 > n$, ce qui contredit le fait que $k_0 = 1$. Finalement, $k_0 \leq n$.

- (f) Par hypothèse, N^r est la matrice nulle. Soit \mathcal{B}_c la base canonique de \mathbb{R}^n . On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f^r) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)^r = N^r = 0_{n,n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)})$$

Par bijectivité de l'application $g \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(g)$, on en conclut que f^r est le morphisme nul. En particulier, $\text{Ker}(f^r) = \text{Ker}(0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}) = \mathbb{R}^n$.

- (g) Par ce qui précède, on a $u_r = n$. De plus, comme $f^r = 0_{\mathbb{R}^n}$, on a aussi $f^{n+r} = 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $u_{n+r} = n$.

Or, par les questions précédentes, il existe un entier $k_0 \leq n$ tel que $u_{k_0} = u_{k_0+1} = u_{k_0+2} = \dots$. En particulier, comme $n+r \geq k_0$, on en déduit que $u_{k_0} = u_{n+r} = n$. Donc, comme $n \geq k_0$, on a aussi $u_n = u_{k_0} = n$. Ainsi, $\dim \text{Ker}(f^n) = n$, ou encore f^n est le morphisme nul. Ainsi, $N^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f^n)$ est la matrice nulle.

- 5) On notera 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A nilpotente et toute-puissante. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^r = 0$. Comme A est toute-puissante, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^n$. En particulier

$$A^r = B^{nr} = 0$$

On en conclut que B est nilpotente (car $B^r = 0$ avec $r' = nr$). Par la question 4), on en conclut que $B^n = 0$. Ainsi, $A = B^n = 0$.